

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

DUPICAAT

DR 29

Una nota su un analogo infinitesimale del
q-d algoritmo.

Rendiconti di matematica e delle sue applicazione, 21
(1962), p 77-85).

P. Wynn.



1962

P. WYNN

29

Una nota su un analogo infinitesimale
del $q-d$ algoritmo



EDIZIONI CREMONESE
ROMA 1962

WYNN, P.
1962
Rendiconti di Matematica
(1-2) Vol. 21, pp. 77-85

Una nota su un analogo infinitesimale del $q-d$ algoritmo

di P. WYNN (Amsterdam)

Il problema di sviluppare l'integrale di Laplace

$$(1) \quad F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \Phi(a+t) dt$$

in una frazione continua

$$F(z) = \frac{\Phi(a)}{z - Q_1(a)} - \frac{E_1(a)}{z - Q_2(a)} + \frac{E_2(a)}{z - Q_3(a)} - \dots$$

può essere affrontato in due modi. Il primo, essendo essenzialmente un processo discreto, usa un risultato della teoria del $q-d$ algoritmo [1]. Secondo questo la serie infinita

$$(2) \quad \sum_{r=0}^{\infty} c_{m+r} z^{-r-1}$$

può essere trasformata nella frazione continua

$$(3) \quad \frac{c_m}{z - q_1^{(m)}} - \frac{e_1^{(m)} q_1^{(m)}}{z - q_2^{(m)} - e_1^{(m)}} + \dots - \frac{e_r^{(m)} q_r^{(m)}}{z - q_{r+1}^{(m)} - e_r^{(m)}} + \dots$$

nella quale le quantità $e_r^{(m)}$, $q_r^{(m)}$ vengono determinate con l'applicazione ricorrente della regola del rombo

$$(4) \quad q_r^{(m)} + e_r^{(m)} = q_r^{(m+1)} + e_{r-1}^{(m+1)}$$

e

$$(5) \quad q_{r+1}^{(m)} e_r^{(m)} = q_r^{(m+1)} e_r^{(m+1)}$$

usando come valore iniziale $e_0^{(m)} = 0$, $q_1^{(m)} = c_{m+1}/c_m$.

Conformemente l'integrale (1) è sviluppato formalmente secondo le potenze inverse di z , dando luogo alla serie

$$(6) \quad F(z) \propto \sum_{r=0}^{\infty} \Phi^{(r)}(a) z^{-r-1}$$

ed i coefficienti nella frazione continua della forma (3), corrispondenti alla serie (6), vengono determinati dalle relazioni (4) e (5), quando vi si ponga $c_s = \Phi^{(s)}(a)$.

Usando la notazione

$$(7) \quad H_k^{(m)} \{c_s\} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+k-2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m+k-1} & c_{m+k} & \dots & c_{m+2k-2} \end{vmatrix}, \quad H_0^{(m)} \{c_s\} = 1$$

si può dimostrare [2] che

$$(8) \quad e_r^{(m)} = \frac{H_{r+1}^{(m)} \{c_s\} H_{r-1}^{(m+1)} \{c_s\}}{H_r^{(m)} \{c_s\} H_r^{(m+1)} \{c_s\}}$$

$$(9) \quad q_r^{(m)} = \frac{H_r^{(m+1)} \{c_s\} H_{r-1}^{(m)} \{c_s\}}{H_r^{(m)} \{c_s\} H_{r-1}^{(m+1)} \{c_s\}}$$

$$(10) \quad e_r^{(m)} q_r^{(m)} = \frac{H_{r+1}^{(m)} \{c_s\} H_{r-1}^{(m)} \{c_s\}}{[H_r^{(m)} \{c_s\}]^2}$$

e che i denominatori

$$(11) \quad p_n^{(0)}(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z & \dots & z^n \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix}} (-1)^n \quad n = 1, 2, \dots$$

delle ridotte successive della frazione continua (3) soddisfanno la relazione ricorrente

$$(12) \quad p_{n+1}^{(0)}(z) = (z - q_{n+1}^{(0)} - e_n^{(0)}) p_n^{(0)}(z) - e_n^{(0)} q_n^{(0)} p_{n-1}^{(0)}(z)$$

con

$$p_0^{(0)}(z) = 1, \quad p_1^{(0)}(z) = z - q_1^{(0)}$$

Per distinguere fra i coefficienti di frazioni continue derivate da diverse serie di potenze, i coefficienti ed i vari associati determinanti di Hankel verranno scritti con un argomento esprimente la forma generale del coefficiente c_s . Così i determinanti di Hankel che si riferiscono ai coefficienti della serie (6) si scriveranno

$$H_k^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} \quad m, k = 0, 1, \dots$$

e la frazione continua per la serie (6) si scriverà

$$\frac{\Phi(a)}{z - q_1^{(0)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} -} \frac{e_1^{(0)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} q_1^{(0)} \{ \Phi^{(s)}(a) \}}{z - q_2^{(0)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} -} \frac{e_r^{(0)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} q_r^{(0)} \{ \Phi^{(s)}(a) \}}{z - q_{r+1}^{(0)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} -} \dots$$

Occorre osservare che l'uso delle relazioni di rombo (4) e (5) dà pure i coefficienti nella frazione continua

$$F_m(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \Phi^{(m)}(a + t) dt =$$

$$= \frac{\Phi^{(m)}(a)}{z - q_1^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} -} \frac{e_1^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} q_1^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \}}{z - q_2^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} -} \frac{e_r^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} q_r^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \}}{z - q_{r+1}^{(m)} \{ \Phi^{(s)}(a) \} -} \dots$$

Il secondo metodo consiste nel trasformare la serie infinita

$$h \sum_{r=0}^{\infty} \Phi(a + rh) e^{-(r+1)hz}$$

considerata come uno sviluppo secondo le potenze inverse di e^{hz} , in una frazione continua nell'argomento e^{hz} , usando le regole di rombo (4) e (5) con $c_r = \Phi(a + rh)$, e tenendo conto del comportamento della frazione continua e dei suoi coefficienti, quando h tende a zero. È opportuno di sostituire la variabile discreta r nelle rela-

e

$$(21) \quad \lim_{h \rightarrow 0} [q_{r+1}^{(0)} \{\Phi(t+sh)\} + e_r^{(0)} \{\Phi(t+sh)\}] = Q_r(t) =$$

$$= \frac{H_{r+1}^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_r^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\}} + \frac{H_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_{r+1}^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_r^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}.$$

Applicando una nota regola di derivazione segue che

$$(22) \quad \frac{d}{dt} H_k^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} = \begin{vmatrix} \Phi(t) & \Phi'(t) & \dots & \Phi^{(k-1)}(t) \\ \Phi'(t) & \Phi''(t) & \dots & \Phi^{(k)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^{(k-2)}(t) & \Phi^{(k-1)}(t) & \dots & \Phi^{(2k-3)}(t) \\ \Phi^{(k)}(t) & \Phi^{(k+1)}(t) & \dots & \Phi^{(2k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} E_r(t) =$$

$$= \frac{H_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_{r-1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{[H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}]^2} \left[\frac{\frac{d}{dt} H_{r-1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r-1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}} + \frac{\frac{d}{dt} H_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}} - 2 \frac{\frac{d}{dt} H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}} \right]$$

onde si può scrivere, usando la formula (22), ed il primo sviluppo di Schweins [4]

$$\begin{aligned} & \frac{-H_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_{r-1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{[H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}]^2} \times \\ & \times \left[\frac{H_{r+1}^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_r^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\}} - \frac{H_r^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_{r-1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}}{H_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} H_{r-1}^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\}} \right] = \\ & = -E_r(t) [q_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} - q_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}] \end{aligned}$$

o, coll'uso della regola di rombo (4):

$$-E_r(t) [q_{r+1}^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\} - q_r^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\} - e_{r-1}^{(1)} \{\Phi^{(s)}(t)\} + e_r^{(0)} \{\Phi^{(s)}(t)\}]$$

e finalmente

$$E_r(t) [Q_{r+1}(t) - Q_r(t)]$$

in accordo con l'equazione (17). L'equazione (16) si può dedurre in analoga maniera dalle espressioni (20) e (21) in collegamento con (22).

Se la serie (2) è lo sviluppo in serie di potenze di una funzione razionale di z , il cui denominatore è un polinomo di grado n in z , e il cui numeratore è un polinomo di grado $n - 1$ al massimo, la frazione continua (3) si arresta, e nello schema $q - d$ (4) e (5) tutte le $e_n^{(s)}$, $s = 0, 1, \dots$ risultano nulle. Tuttavia può accadere che per caso una quantità $e_r^{(\bar{m})}$ sia zero. La quantità $q_{r+1}^{(\bar{m})}$ dedotta con l'applicazione dell'equazione (5), è allora formalmente infinita. Anche le due quantità $e_{r+1}^{(\bar{m})}$ e $e_{r+1}^{(\bar{m}-1)}$ sono formalmente infinite, e la quantità $q_{r+1}^{(\bar{m}-1)}$ è indeterminata. Si può superare questa difficoltà con l'applicazione di certe regole singolari. Essa nasce perchè la medesima relazione lineare esiste fra i gruppi dei coefficienti $c_{\bar{m}}, c_{\bar{m}+1}, \dots, c_{\bar{m}+n}$, se $\bar{m} = m, m+1, \dots, m+n$, però non per valori generici di \bar{m} . Dall'esame della formula coi determinanti si può vedere facilmente che casi singolari non nascono nella forma continuativa dell'algoritmo $q - d$. O esiste una relazione lineare di ordine finito fra le derivate successive della funzione $\Phi(t)$, — nel qual caso l'integrale di Laplace è equivalente ad una funzione razionale di z , la funzione $E_n(t)$ è identicamente nulla, e la frazione continua (18) si arresta — oppure non c'è tale relazione e tutte le funzioni $E_r(t)$, $Q_r(t)$ sono completamente determinate.

Un altro uso al quale servono le formule con determinanti (20) e (21) è di esprimere i risultati ottenuti dall'applicazione delle relazioni (16) e (17) (alle differenze e differenziali) alla funzione $\Phi(t)e^{-\eta t}$. Occorre ricordare che

$$(23) \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^s \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} = e^{-\eta t} \sum_{r=0}^{r=s} \binom{r}{s} (-\eta)^{r-s} \left(\frac{d}{dt}\right)^r \Phi(t).$$

Se si sostituisce la funzione $\Phi(t)$ nelle formule (20) e (21) con la $e^{-\eta t} \Phi(t)$, e se si usa l'equazione (23), e, dov'è opportuno, la relazione

$$H_r^{(1)} \left\{ \frac{d^s}{dt^s} e^{-\eta t} \Phi(t) \right\} = \begin{vmatrix} 1 & e^{-\eta t} \Phi(t) & \frac{d}{dt} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} & \dots & \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} \\ 0 & \frac{d}{dt} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} & \frac{d^2}{dt^2} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} & \dots & \frac{d^r}{dt^r} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{d^r}{dt^r} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} & \frac{d^{r+1}}{dt^{r+1}} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} & \dots & \frac{d^{2r-1}}{dt^{2r-1}} \{e^{-\eta t} \Phi(t)\} \end{vmatrix}$$

si deduce, dopo opportune operazioni su righe e colonne, che

$$\begin{aligned}
 \tilde{E}_r(a) &= \frac{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a) \\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^{(r)}(a) & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r)}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a) \\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^{(r-1)}(a) & \Phi^{(r)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-2)}(a) \end{vmatrix}}^2 = E_r \\
 \tilde{Q}_{r+1}(a) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \Phi(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a) \\ \eta & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta^{r+1} & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r+1)}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a) \\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^{(r)}(a) & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r)}(a) \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a) \\ \eta & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta^r & \Phi^{(r)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-1)}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a) \\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r+1)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^{(r)}(a) & \Phi^{(r+1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r)}(a) \end{vmatrix}} + \\
 &+ \frac{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-2)}(a) \\ \eta & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta^{r-1} & \Phi^{(r-1)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-3)}(a) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Phi(a) & \Phi'(a) & \dots & \Phi^{(r-1)}(a) \\ \Phi'(a) & \Phi''(a) & \dots & \Phi^{(r)}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi^{(r-1)}(a) & \Phi^{(r)}(a) & \dots & \Phi^{(2r-2)}(a) \end{vmatrix}} = \\
 &= \frac{P_{r+1}^{(0)}(\eta)}{P_r^{(0)}(\eta)} + E_r(a) \frac{P_{r-1}^{(0)}(a)}{P_r^{(0)}(a)}
 \end{aligned}$$

dove, come si può vedere dall'equazione (11), i polinomi sono i denominatori delle ridotte successive della frazione continua

$$\frac{\Phi(a)}{\eta - Q_1(a) -} \frac{E_1(a)}{\eta - Q_2(a) -} \cdots \frac{E_r(a)}{\eta - Q_{r+1}(a) -} \cdots$$

e le « tilde » son state usate per indicare il risultato dell'applicazione di relazioni (16) e (17) alla funzione $e^{-\eta t} \Phi(t)$. Ma dalla formula ricorrente (vedi equazione (12))

$$p_{r+1}^{(0)}(\eta) = \{\eta - Q_{r+1}(a)\} p_r^{(0)}(\eta) - E_r(a) p_{r-1}^{(0)}(\eta)$$

$$\tilde{Q}_{r+1}(t) = Q_r(t) - \eta$$

questo risultato è, naturalmente, dedotto per mezzo dello sviluppo

$$F(z + \eta) = \frac{\Phi(a)}{z - \eta - Q_1(a) -} \frac{E_1(a)}{z + \eta - Q_2(a) -} \cdots \frac{E_r(a)}{z + \eta - Q_{r+1}(a) -} \cdots$$

L'autore ringrazia la Deutsche Forschungsgemeinschaft per avergli procurato una concessione rendendo possibile questa nota. Egli esprime anche la sua gratitudine a Cornelia Halke per avere curato la traduzione italiana del testo.

BIBLIOGRAFIA

1. RUTISHAUSER H., *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Birkhäuser Verlag. Basel/Stuttgart 1957.
2. RUTISHAUSER H., *op. cit.* p. 10.
3. RUTISHAUSER H., *Ein kontinuierliches Analogon zum Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, Arch. Math. 5, 132-137 (1954).
4. AITKEN A. C., *Determinants and Matrices*, Oliver and Boyd, 6 Ed. 1949, Ch. V, p. 108.
5. RUTISHAUSER H., *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP, vol. 5, 1954, p. 241.

[Entrato in Redazione l'11 settembre 1961].

